

Niveau(x) d'enseignement: 4
Centre d'intérêt: 841

Numéro EDUQ : 8670133

De Champlain, Denis.

Fonctions exponentielles et fonctions logarithmiques / doc. préparé par Denis de Champlain, Marcel Mius d'Entremont, Jean Matte ; [pour le Ministère de l'éducation, Direction générale des programmes et la Direction générale des régions]. -- [Québec] : Les Directions, 1985. 101 p. en pag. multiple : graph. ; 28 cm. -- (Matériel de soutien à l'implantation des programmes du secondaire)

La couv. porte en outre: Mathématique, option 1, plan de cours. Code: 16-3303-08. Bibliogr.: p. 8-14.

Vedette(s)-secondaire(s): Entremont, Marcel Mius d' * Matte, Jean * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des programmes * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des régions

Descripteur(s): Mathématiques * Plan de cours * Programme d'enseignement * Guide pédagogique * Activité d'apprentissage * Secondaire (Ordre d'enseignement)

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option 1 en mathématiques au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants. Le document porte sur les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques. Le document comprend trois parties: 1. exposants et radicaux; 2. fonctions exponentielles; 3. fonctions logarithmiques. Pour chaque partie, on précise les objectifs, et l'on présente des activités d'apprentissage et des exercices. Une banque de problèmes termine le document.

Type de document: d

Notice(s) connexe(s): 8670132, 8670134, 8670135



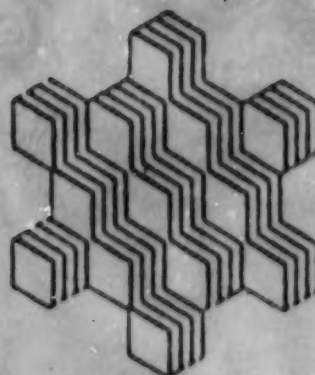
MATÉRIEL DE SOUTIEN À L'IMPLANTATION DES PROGRAMMES DU SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION I

PLAN DE COURS

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET
FONCTIONS LOGARITHMIQUES



DÉCEMBRE 1985

FONCTIONS EXPONENTIELLES
ET
FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Document préparé par: Denis de Champlain
Marcel Hius d'Entremont
Jean Matte

AVANT-PROPOS

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option I (064-434) en mathématique au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants.

Voici la liste des documents qui ont été rédigés.

NUMÉRO	TITRE	AUTEURS
16-3303-02	La logique	André Davidson René Parenteau
16-3303-03	Les ensembles de nombres et les ensembles	Francine Collin André Davidson Pierre Mathieu
16-3303-04	L'algèbre des réels	Pierre Mathieu Hélène Tessier
16-3303-05	Les relations et les fonctions	Robert Mercier Jean Saumier
16-3303-06	La géométrie analyti- que et l'algèbre du cours 414*	Jean-Luc Bombardier Pierre Mathieu
16-3303-07	Les coniques	Paul Patenaude Rosa María Sandoval
16-3303-08	Les fonctions exponen- tielles et les fonctions logarithmiques	Denis De Champlain Marcel Mius D'Entremont Jean Matte

*Il est possible de se procurer la carte murale mentionnée dans ce document en communiquant avec: Monsieur Pierre Mathieu
C.S.R. Yamaska
2270 avenue Malhiot
ST-HYACINTHE (Québec)
J2S 4G3
Tél: (514) 773-8401

Le contenu de ces documents n'engage que les auteurs. Tout organisme scolaire qui le souhaite est autorisé à reproduire ces documents à condition d'en préciser la source.

PRÉFABLES

Connaissance des systèmes de nombres
(Option 1, objectif terminal 2.1)

- Notion de fonction
(Option 1, objectif terminal 4.1)

- Croissance et décroissance
(Deuxième cycle, 1.2.4, 1.2.5 et 1.3.4)

- Notion de translation
(1er cycle)

CONTENU

OBJECTIF TERMINAL 4-2

Théorie des exposants

- définition de la puissance $x^{\text{ème}}$ de a (a^x)
- signe de a^x
- propriétés

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ a^{n-m} & \text{si } n > m \end{cases}$$

$$(a \cdot b \cdot c)^m = a^m b^m c^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

- extension

$$a^0 = 1$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- calcul d'expressions simples contenant des exposants

fonction exponentielle

- représentation graphique (base > 1 , < 0 dans l'intervalle $]0,1[$)
- propriétés du graphique
- domaine et image
- croissance et décroissance
- image de la fonction exponentielle par une translation
- asymptote
- réciproque de la fonction exponentielle
- zéros de fonctions $(+, -, x, \frac{1}{x})$

OBJECTIF TERMINAL 4.3

fonction logarithmique

- représentation graphique (base > 1 , < 0 , dans l'intervalle $]0,1[$)
- propriétés du graphique
- domaine et image
- croissance et décroissance
- image de la fonction logarithmique par une translation
- asymptote
- réciproque de la fonction logarithmique

- zéros de fonctions {+... x...}

- propriétés des logarithmes

$$\log_a M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a (M)^N = N \log_a M$$

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N$$

PROBLÈMES

Objectif terminal 4.2

- Calculer des expressions simples en utilisant les propriétés des exposants
- Réduire des expressions simples en utilisant les propriétés des exposants
- Démontrer les propriétés des exposants
- Construire le graphique cartésien d'une fonction exponentielle et de sa réciproque
- Déterminer les propriétés du graphique cartésien de la fonction exponentielle
- Trouver l'image d'une fonction exponentielle par une translation
- Calculer les zéros de fonctions $(+, -, \cdot, \div, x)$
- Résoudre des problèmes utilisant des fonctions exponentielles

OBJECTIF TERMINAL 4.2

- Utiliser la définition des logarithmes
- Démontrer les propriétés des logarithmes
- Construire le graphique cartésien d'une fonction logarithmique et de sa réciproque
- Déterminer les propriétés du graphique cartésien de la fonction logarithmique
- Trouver l'image d'une fonction logarithmique par une translation
- Calculer les zéros de fonction $(+, -, x, \div)$
- Appliquer les propriétés des logarithmes
- Résoudre des équations logarithmiques
- Résoudre des problèmes utilisant des fonctions logarithmiques

CHAMPS D'APPLICATIONS

FONCTION EXPONENTIELLE

- Carbone 14
- Bactéries
- Rebond d'une balle
- Intérêts composés
- Inflation
- Progressions géométriques
- Condensateur

FONCTION LOGARITHMIQUE

- pH
- Amplitude vs fréquence

REFERENCES

- Allendörfer, Carl B., Oakley, Collette O. Principles of mathematics.
Mc Graw-Hill Company, Inc., 1963
- Exponential and logarithmic functions (219-231)
- Bronilhard, A. et Cloutier, J. Mathématiques contemporaines 5. Editions HM Ltée, 1970.
- Fonctions exponentielles et logarithmiques (181-204)
- Collette, C.P. et Laiborté, L. Introduction à la mathématique. Editions du renouveau pédagogique inc., 1971
- Fonctions exponentielles et logarithmiques (391-407)
- Collette, Jean-Paul, Histoire de la mathématique. Editions du renouveau pédagogique inc., 1973
- Logarithmes (191-194)

Vol. 1. J. J. Cornefrey, Brown, Kane. Algebra and trigonometry. Ten-ber's édition, Houghton Mifflin Company, 1982

- exponential functions (Lesson commentary) (T108-T110)

- exponential and logarithmic functions (373-405)

Dolciani, Austin, Beckenbach, Sharron.

Mathématiques de l'école moderne - secondaire V. Algèbre et trigonométrie.
Traduction par Hector Gravel. Centre de psychologie et de Pédagogie, 1968.

- radicaux (306-337)

- extension des lois des exposants (398-404)

- des exposants aux logarithmes (404-410)

- calculs numériques (411-432)

Fisher, R. C. et Liebow, Allen D. Algèbre et trigonométrie. Editions Beauchesne, 1964

- fonctions exponentielles (76-79)
- fonctions logarithmiques (79-106)

Haus, H., Robert, Marcel, Bernier, J. Mathématiques nouvelles 522. Editions P.I.C. 1971

- exposants (159-168)
- fonction exponentielle (169-172)
- fonction logarithmique (173-186)
- principaux systèmes de logarithmes (187-205)

K & F Slide rule, Decim an instruction manual. Keuffel and Esser Co., 1962.

- logarithmes (98-106)

Langelot, J.-P., Classes, M., livre 1, O., Hérobert, H. Mathématiques nouvelles 522-532.
Editions P.I.C., 1973.

- théorie des exposants (386-399)
- fonctions exponentielles (400-408)
- fonctions logarithmiques (408-434)
- applications (434-455)

Laplante, P., rt. Mathématique 211. Editions HPM Ltee, 1982.

- les exposants (15-19)
- les radicaux (11-15)
- les logarithmes (101-113)

Larue, A., ndre et Risi, Marcel. Mathématiques intermédiaires. Presses de l'Université Laval.

- puissances (28-31)
- exposants fractionnaires, négatifs et nuls (32-40)
- radicaux (41-55)
- logarithmes (118-156)

Les frères de l'Instruction chrétienne. Algèbre. Procure des frères de l'Instruction chrétienne, 1956.

- puissances (4-5, 136-148)
- racines (11-12, 149-193)
- logarithmes (544-572)
- intérêts composés (573-585)
- annuités (586-601)

Line, T. and Lafond, Gaston. Relations. Dunod Québec Inc., 1971.

- propriétés des exposants (193-196)
- fonction exponentielle (196-200)
- fonction logarithmique (202-209)
- propriétés des logarithmes (210-216)
- logarithmes décimaux (216-222)
- équations et inéquations exponentielles et logarithmiques (222-225)

Lorent, S. et Lorent, R. Algèbre 2B. Maison d'édition A. de Bock, Bruxelles, 1965.

- logarithmes (195-253)
- fonctions exponentielles et logarithmiques (465-479)

MTM. A source book of applications of school mathematics. 1980

- logarithms and exponents (235-247)

Sabourin, Conrad. Algèbre 4. Editions Vaudreuil Inc.

- exposants (2 - 3)
- fonction exponentielle (4 - 8)
- logarithmes (9 - 11)
- fonction logarithmique (12 - 16)
- calcul logarithmique (17 - 25)
- équations exponentielles et logarithmiques (26 - 30)

Bordier, M., Bordier, J., Berneron, A. Utilisation de la calculatrice de poche pour l'enseignement des mathématiques au secondaire.

PERMANA. (1701-5028), Télé-Université, 1981

- activités sur la fonction exponentielle (28-33, 116-118)
- activités sur les logarithmes (85-92)

Bordier, M. et Boyer, H., Fonction numériques à l'aide de la calculatrice. PERMANA, (1701-3032-3042), Télé-Université, 1979.

- les fonctions à croissance multiplication (155-175)
- l'échelle logarithmique (246-282)

Whitlin, L., Schweizer et autres., Algèbre 2, collection "La mathématique", Traduit par E. Wagneur. Editions Lidec Inc., 1969.

- puissances d'exposants naturels (91-111)
- extension de la notion de puissance (113-148)
- fonctions exponentielles et logarithmiques (149-185)

HISTORIQUE

Un peu d'histoire...

En 1614, le baron écossais John Napier (1550-1617) devenu pour nous Népér, livre son célèbre traité intitulé "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" (Description de la merveilleuse loi des logarithmes) qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire. Cette découverte a permis :

- d'aplanir les difficultés engendrées par des calculs longs et pénibles;
- l'invention de la règle à calcul que tout étudiant en sciences se servait pour calculer d'une façon rapide et suffisamment exacte;
- de doter la mathématique des fonctions exponentielles et logarithmiques pour l'étude des phénomènes de croissance ou de décroissance.

Peu de temps après, un mathématicien anglais Henry Briggs (1561-1620), visita Napier à Edimbourg et les deux savants en arrivèrent à la conclusion que la logarithme de 1 devrait être zéro tandis que le logarithme de dix devrait être égal à 1, ainsi naquirent les logarithmes dit vulgaires.

En 1617, Briggs publia une table de logarithmes des nombres de 1 à 1 000 exprimés avec une précision de quatorze décimales.

On a rarement vu une découverte se répandre si rapidement et de 1614 à 1631, on trouve plus de vingt ouvrages publiés sur le sujet.

C'est cependant William Oughtred (1574-1660) l'inventeur de la règle à calcul, qui énonça de façon explicite vers 1650 les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}\log mn &= \log m + \log n \\ \log \frac{m}{n} &= \log m - \log n \\ \log m^n &= n \log m\end{aligned}$$

On peut dire que l'invention des logarithmes eut un impact considérable sur la structure des mathématiques et elle décupla les méthodes de calculs des astronomes.

OBJECTIF:

AIDER les élèves à s'interroger sur les fondements théoriques qui ont permis d'effectuer des multiplications et des divisions ainsi que de trouver les carrés, les racines carrées, les cubes et les racines cubiques de nombre sur la règle à calcul.

MOYEN:

FAIRE manipuler une "règle à calcul" primitive par les élèves.

MATÉRIEL:

Feuille de SEMI-LOG 1 (Annexe 1)

Feuille de SEMI-LOG 2 (Annexe 2)

Feuille de SEMI-LOG 3 (Annexe 3)

Ces feuilles devront être coupées en règles pour être utilisées au cours de l'activité.

INTRODUCTION: La règle à calcul fut inventée par un mathématicien anglais, William Oughtred, qui a vécu de 1574 à 1660. Cette invention révolutionnaire permettrait à son utilisateur de calculer d'une façon rapide et suffisamment exacte. Elle fut détrônée il y a une quinzaine d'années lorsque la calculatrice électronique fit son apparition.

Le but de cette activité est de vous apprendre le fonctionnement d'une règle à calcul rudimentaire. Pour ce faire, on utilisera quatre règles (A, C, D et E).

LECTURE DES ECHELLES

On prend la règlette C, elle est comme celle de la figure 1.



FIGURE 1

On remarque qu'elle est divisée en 9 parties et que les grandes divisions sont indiquées par 1, 2, 3, ..., 9, 1

Entre deux chiffres, on peut subdiviser une partie en dix plus petites comme dans la figure 2. Ce qui nous permet de lire un nombre à 2 chiffres significatifs près.



FIGURE 2

Entre 1 et 5, on pourra même lire un troisième chiffre significatif. Cependant entre 5 et 10, le troisième chiffre significatif possible est soit 0 ou 5.

Ainsi, sur la règlette de la figure 3, on pourra lire les nombres correspondants aux lettres A, B, C, ...



FIGURE 3

A 110, B 124, C 215, D 249, E 510 et F 615

On remarque que les lettres correspondent à des nombres à trois chiffres et que l'on ne s'occupe pas de la virgule.

Maintenant, trouve les nombres correspondant aux lettres de la figure 4.

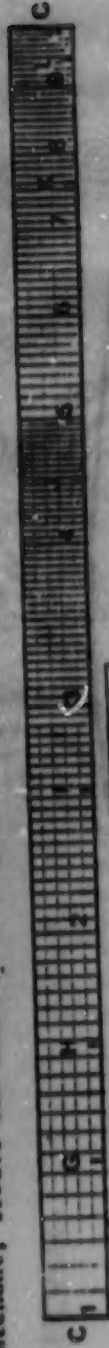


FIGURE 4

Compare tes réponses avec ton voisin.

Regarde maintenant la règlette D, elle est semblable à la règlette C.

Donc, la lecture se fait de la même façon.

Que doit-on faire avec les règlettes A et K ? La précision va-t-elle demeurer la même ?

Etablis tes règles du jeu, c'est-à-dire choisis ta précision.

MULTIPLICATION

Le procédé pour multiplier se fait en utilisant les règlettes C et D. Pour multiplier 15 par 5, on procède comme dans la figure 5.

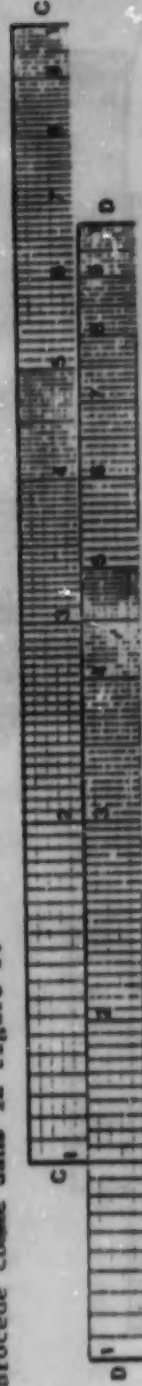


FIGURE 5

Place le 1 de la règlette C au-dessus du 15 de la règlette D.

On lit le nombre correspondant sur la règlette B au 5 de la règlette C.

Ce nombre est 75.

Mais il se peut que le multiplicateur sur la règle C dépasse l'extrémité droite de la règle D. Par exemple, pour multiplier 75 par 9, on procède comme dans la figure 6.



FIGURE 6

EXERCICES

1. 3×5

2. 345×2

3. 715×6

4. $(25)^2$

5. $0,9 \times 2$

6. $15 \times 5 \times 9$

Le résultat d'une opération ne tient pas compte de la virgule. Pour la placer, il faut estimer la réponse.

DIVISION

Le procédé pour diviser se fait en utilisant les règles C et D.
Pour diviser 8 par 5, on procède comme dans la figure 7.

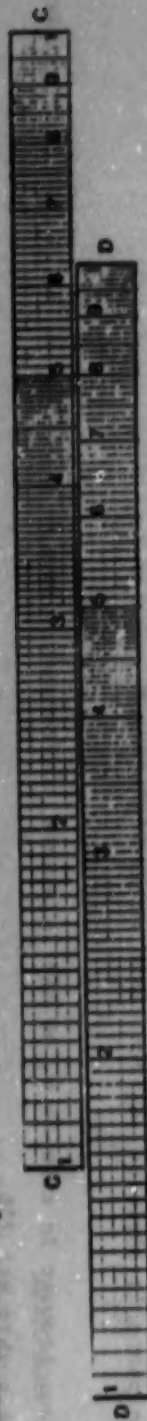


FIGURE 7

On place le 5 de la règle C au-dessus du 8 de la règle D.
On lit le nombre correspondant sur la règle D au 1 de la règle C.
Ce nombre est 1,6.

EXERCICES

1. $6 \div 8$

2. $105 \div 7$

3. $144 \div 18$

4. $2 \div 125$

5. $1 \div 14$

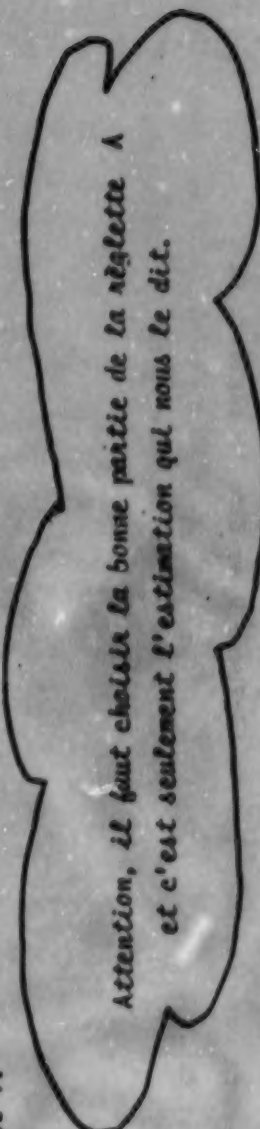
Pour placer la virgule, il faut
estimer la réponse.

CARRÉS ET RACINES CARRÉES

On place la règlette A au-dessus de la règlette D.

Pour trouver le carré de 6, on lit le nombre correspondant sur la règlette A au 6 de la règlette D.
Ce nombre est 36.

Pour trouver la racine carrée de 49, on fait l'inverse, c'est-à-dire, on lit le nombre correspondant sur la règlette D au 49 de la règlette A.
Ce nombre est 7.



*Attention, il faut choisir la bonne partie de la règlette A
et c'est seulement l'estimation qui nous le dit.*

CUBES ET RACINES CUBIQUES

On place la règlette K au-dessus de la règlette D.

Pour trouver le cube de 6, on lit le nombre correspondant sur la règlette K au 6 de la règlette D.
Ce nombre est 216.

Pour trouver la racine cubique de 343, on fait l'inverse, c'est-à-dire, on lit le nombre correspondant sur la règlette D au 343 de la règlette K.
Ce nombre est 7.

Attention, il faut choisir la bonne partie de la virgule K et c'est seulement l'estimation qui nous le dit.

EXERCICES

1. 16^2

3. 12^3

2. $\sqrt{625}$

4. $\sqrt[3]{126}$

CONCLUSION: On vient de voir les principes de fonctionnement de la règle à calcul.

En combinant ces opérations simples, on peut résoudre des problèmes plus complexes comme par exemple:

$$\frac{(2,60)^2}{2,17 \times 7,28} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[3]{19,2^2}}{7,13^2} = 0,122$$

Les mathématiciens du début du XVII^e siècle savaient sur quels fondements théoriques était basé le fonctionnement de la règle à calcul.

On verra dans les cours qui suivent une réponse à cette question.

P.S.: Si vous voulez en savoir plus sur la règle à calcul, il existe sûrement des volumes qui traitent du sujet en bibliothèque.

UN RETOUR EN ARRIERE

On a appris à se servir d'une règle à calcul, voyons sur quel principe elle fonctionne.

Briggs avait trouvé que dans la base 10

$\log 1 = 0,000\ 00$	$\log 2 = 0,301\ 03$	$\log 3 = 0,477\ 12$
$\log 4 = 0,602\ 06$	$\log 5 = 0,698\ 97$	$\log 6 = 0,778\ 15$
$\log 7 = 0,845\ 10$	$\log 8 = 0,903\ 09$	$\log 9 = 0,954\ 24$

Il subdivisa une règle de 10 pouces (système anglais) qui correspond à 253,5 mm en se servant de la valeur du logarithme.

Ainsi il place le 1 au début du segment car $253,5 \times \log 1 = 253,5 \times 0,000\ 00 = 0$.

De même, il place le 2 à 76,31 mm du début de la règle car $253,5 \times \log 2 = 253,5 \times 0,301 = 76,311\ 105$.

Ainsi de suite...

Vérifie avec ta calculatrice que les chiffres sur ta règlette C sont bien situés.

REMARQUE: Il se vend dans les librairies, du papier logarithmique de toute nature pour aider les ingénieurs à tracer des courbes pour illustrer diverses données.

Ainsi lorsqu'on achète un radio, un système de son, une guitare, on voit souvent dans les dépliants publicitaires, des courbes de puissance exprimée en décibels.

Le décibel est une unité servant à exprimer l'intensité du son mais en logarithme.

[illegible]

Page 1 of 1

[illegible]

4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80																				

OPTION I

FONCTIONS EXPONENTIELLES

ET

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Première partie

Exposants et radicaux

OBJECTIF COURANT: 4.2.1: Appliquer la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

L'étude des fonctions "exponentielles et logarithmiques" reposent essentiellement sur les théorèmes qui régissent la théorie des exposants.

Dans cette section, il faut définir les lois, démontrer les théorèmes et rendre les élèves capables d'appliquer la théorie des exposants pour réduire des expressions algébriques.

Activité 1 Exposants entiers strictement positifs

UTILITE DE LA NOTATION EXPONENTIELLE

Cette notation fut introduite par le Français René Descartes, au dix-septième siècle.

On donne à l'élève quelques exemples pour montrer l'utilité de cette notation:

- la distance qui sépare la terre de l'étoile la plus proche du système solaire est approximativement de 4×10^{13} km (au lieu d'écrire 40 000 000 000 000 km)
- le diamètre d'un électron est 1×10^{-13} ou $\frac{1}{10^{13}}$ cm (au lieu d'écrire 0,000 000 000 000 1 cm)
- etc

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ENVOYANT ENTIER POSITIF

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre a est le produit de n facteurs égaux à ce nombre. La puissance ainsi formée se représente par a^n ou $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a ainsi: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$

SIGNES DES PUISSANCES

- Si $a > 0$, la puissance a^n est toujours positive.
- Si $a < 0$, il existe deux possibilités:
 - 1^0 Si n est pair, alors $a^n > 0$
 - 2^0 Si n est impair, alors $a^n < 0$

Ex: $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$(-2)^4 = (-2) (-2) (-2) (-2) = 16$

$(-4)^3 = (-4) (-4) (-4) = -64$

CALCULF:

a) 2^8 b) $(-4)^3$ c) 3^2 d) $(-3)^4$

e) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

PROPRIETES DES EXPOSANTS:

On illustre chacune des propriétés à l'aide de valeurs numériques et on les démontre.

- 1) Pour effectuer le produit de puissances d'un même nombre, il suffit de faire la somme des exposants.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^2 \times 2^3 = ?$$

$$(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$\text{D'où } 2^2 \times 2^3 = 2^2 + 3 = 2^5$$

Démonstration

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ facteurs}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ facteurs}}$$

$$= a^{m+n}$$

Effectuez:

a) $2^5 \cdot 2^2$

b) $x^3 \cdot x^2$

c) $(-2)^4 \cdot 2^3$

d) $-x^5 \cdot 3x^3$

e) $3ab \cdot a^2 b^3$

f) $\dots$

La propriété s'applique-t-elle si on a à multiplier

$$5^2 \cdot 5^3 ?$$

Pourquoi?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- 2) Pour effectuer le quotient de puissances d'un même nombre, il suffit de soustraire les exposants.

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n, a \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = n, a \neq 0 \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m, a \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2 \times 2 = 2^2$$

D'où $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

Démonstration:

Si $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ facteurs}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{(m-n) \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

EXERCICES ET REFERENCES

Effectuez:

a) $\frac{2^5}{2^3}$

b) $\frac{9^{13}}{9^{15}}$

c) $\frac{x^4}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{y^5}$

e) ...

La propriété s'applique-t-elle si on a
diviser $\frac{5^5}{2^5}$?

Pourquoi ?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Si $m = n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = 1$$

($a \neq 0$)

il y a simplification
car $m = n$

Si $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n-m) \text{ facteurs}}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (a \neq 0)$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

- 3) Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit de faire le produit des exposants.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\begin{aligned} (2^3)^2 &= 2^3 \cdot 2^3 \\ &= (2 \times 2 \times 2) (2 \times 2 \times 2) \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (2^3)^2 = 2^3 \times 2 = 2^6$$

Démonstration:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ facteurs}}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ fois}} \\ &= a^{(m \cdot n) \text{ facteurs}} \end{aligned}$$

$$= a^{m \cdot n}$$

Exercice

a) $(7^2)^5$ b) $-(x^3)^4$

c) $(-y^3)^5$ d) $(-x^2)^3$

e) $(2^2)^6 \cdot (-2)^4$

f) $(3^3)^5 \cdot (-3^3)^5$

g) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

- 1) Pour élever un produit de facteurs à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$(2 \cdot 6)^3 = (2 \times 6) \times (2 \times 6) \times (2 \times 6)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$= 2^3 \times 6^3$$

$$\text{D'où } (2 \cdot 6)^3 = 2^3 \cdot 6^3$$

Effectuez:

a) $(2 \cdot 5)^3$ b) $(3^2 \cdot 5^3)^2$

c) $(3a)^5$ d) $(2ab)^4$

e) $(-a^2b)^3$ f) $(-ab^2)^4$

g) ...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 (a \cdot b)^m &= \underbrace{(a \cdot b) (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{m \text{ facteurs}} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ facteurs}} \\
 &= a^m \cdot b^m
 \end{aligned}$$

5) Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever numérateur et dénominateur à cette puissance.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5}$$

$$\text{D'où } \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$$

Effectue:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{3^2}{4}\right)^2$

c) $\left(\frac{6x}{3}\right)^5$

d) $\left(\frac{-x}{4y}\right)^3$

e) $\left(\frac{-6a^2b^5}{-7c^3}\right)^2$

f) ...

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Démonstration:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{\overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{m \text{ facteurs}}}{b}$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{m \text{ facteurs}}}{\overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{m \text{ facteurs}}} = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

In résumé, si $a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^*$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n, a \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = n, a \neq 0 \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m, a \neq 0 \end{cases}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$$

Effectuez:

Simplifiez les expressions suivantes:

a) $\frac{49x^3y^7}{-7xy^2}$

b) $\frac{2^2 \cdot 8 \cdot b^6}{16a}$

c) $(6xy)^3 \cdot 2^5 x^8$

d) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Pour démontrer les 5 propriétés, on a supposé que les exposants étaient des entiers strictement positifs. En utilisant la puissance n^{ième} d'un nombre, on ne pouvait justifier l'emploi de nombres négatifs.

D'après la définition, que veut dire le -2 dans l'expression 3^{-2} ?

Toutes ces propriétés sont-elles valables pour des exposants nuls ou négatifs?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2.- Exposants nuls ou négatifsExposant nul

Il faut montrer que $a^0 = 1$, $\forall a \neq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Posons $m = 0$, on a: $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$

$$a^0 \cdot a^n = a^n$$

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

$a \neq 0$ car la division par zéro n'est pas possible

$$0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = ?$$

Supposons $m = n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$$

mais $a^m \div a^n = 1$
donc $a^0 = 1$

Calcule:

a) 3^{-1} b) 5^0 c) $(-7)^{-3}$

d) 1^{-5} e) $(-1)^{-3}$ f) $\frac{1}{4^{-2}}$

g) x^{-3} h) $\frac{1}{y^{-3}}$ i) $(a+b)^{-3}$

j) $(-20)^0$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exposant négatif

Il faut montrer que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{Si } m = -n, \text{ on a: } a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n}$$

$$= a^0$$

$$= 1$$

$$\text{D'où } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

PROPRIETES

Il faut montrer que les propriétés s'appliquent lorsque les exposants sont des nombres entiers. Dans le cadre de ce cours, il n'est pas nécessaire de démontrer toutes les propriétés. Pour s'éviter un travail long et fastidieux, on se bornera aux démonstrations suivantes où $m, n \in \mathbb{N}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$$1) a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$$

$$= a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$= a^{m-n}$$

$$2) (a^{-m})^{-n} = a^{mn}$$

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$$

$$= a^{mn}$$

$$3) (a \cdot b)^{-m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$$

$$(a \cdot b)^{-m} = \frac{1}{(a \cdot b)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m}$$

$$= a^{-m} b^{-m}$$

NOTE: Ces démonstrations devraient être accompagnées d'exemples utilisant des valeurs numériques.

On complète cette activité par des exercices utilisant des exposants entiers et faisant intervenir toutes les propriétés.

EXERCICES ET REFERENCES

Calcule et exprime le résultat avec des exposants positifs:

a) $(2^3)^{-2}$ b) $(3 \cdot 4^{-1})^{-3}$

c) $\left(\frac{2^3}{2^6}\right)^{-2}$ d) $\frac{8^2}{8^{-2}}$

e) $(6 \cdot 2)^{-1}$ $(6^{-2} \cdot 2)^4$

f) $\frac{(x^3 y^2 z^{-1})^2}{(xyz)^{-2}}$

g) ...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 3.- Exposants fractionnaires

La définition de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre ne s'applique pas pour un exposant fractionnaire. Ça n'a pas de sens de dire que 4 est pris 1/2 fois comme facteur dans l'expression $4^{1/2}$. Que signifie a^n si n est un nombre rationnel? Les propriétés des exposants seront-elles encore valables dans le cas d'exposants rationnels?

Cette activité permettra d'extentionner la théorie des exposants aux exposants fractionnaires.

Racine et exposant fractionnaire

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$; y est une racine n^{e} de a si et seulement si $y^n = a$. (Si y est une solution de $y^n = a$, alors $y = \sqrt[n]{a}$)

(h) notera que:

1° Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ est un nombre réel unique qui est la solution non négative de $y^n = a$

Ex: $\sqrt[4]{16} = 4$ car $4^2 = 16$

$\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{0} = 0$ car $0^3 = 0$

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

2° Si $a < 0$ et si n est impair, $\sqrt[n]{a}$ est un nombre réel unique qui est la solution négative de $y^n = a$

Ex: $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$

3° Si $a < 0$ et si n est pair, $\sqrt[n]{a}$ ne représente aucun nombre réel

Ex: $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$ car la solution est dans $\mathbb{C}$

La définition de la racine n^{e} d'un nombre nous permet de déduire celle de l'exposant fractionnaire.

Sachant que $y^n = x \leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}$

$y^n = 0 \leftrightarrow y = \sqrt[n]{0}$

En posant $y = a^{m/n}$

on peut écrire $(a^{m/n})^n = \boxed{a^m} \rightarrow a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

car $m/n \cdot n = m$

donc $(a^{m/n})^n = a^m$

Ainsi, pour $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$ alors $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

NOTE: Cette définition est conditionnelle à l'existence de

$\sqrt[n]{a^m}$ dans $\mathbb{R}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

A l'aide d'exemples on montre que toutes les propriétés s'appliquent dans le cas des exposants fractionnaires. La démonstration peut-être demandée dans les exercices tout au plus

$$\begin{aligned} \text{Ex: } 16^{1/2} &= \sqrt[2]{16} = 4 \\ 8^{2/3} &= \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \\ a^{2/5} \cdot a^{3/5} &= a^{2/5 + 3/5} = \dots \\ \left(\frac{5}{3}\right)^{2/3} &= a^{6/12} = \dots \\ (m \ n)^{-7/8} &= \frac{1}{(m \ n)^{7/8}} \end{aligned}$$

Il importe que les élèves fassent beaucoup d'exercices dans ce cas.

ACTIVITE 4.- Les radicaux

D'après la définition de l'exposant fractionnaire, on constate que le radical ($\sqrt[n]{y}$) est un exposant fractionnaire. En conséquence, toutes les lois des exposants s'appliquent aux radicaux.

Cette activité permettra aux élèves de connaître et d'utiliser les propriétés des radicaux et d'effectuer sur ceux-ci les quatre opérations.

N.B. On retient que $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICES ET REFERENCES

Simplifie les expressions suivantes:

a) $\left(a^{-1/3}\right)^3$ b) $\left(\frac{-5}{a^{-2}}\right)^{1/2}$

c) $\left(\frac{4a^3x}{ax^{-1}}\right)^{1/2}$ d) $\left(4x^2y^4\right)^{1/2}$

e) $\frac{2x^{-1}y}{x^2y^{-2}}$ f) $\left(\frac{4x^2}{y^{-3}}\right)^{-1/2}$

g) $\left(\frac{27x^{-3}}{8y^5}\right)^{2/3}$

h) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

PROPRIETES DES RADICAUX

1) La racine d'un produit est égale au produit des racines

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Démonstration.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

2) La racine d'un quotient est égale au quotient des racines

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (\text{ou } b \neq 0)$$

Démonstration.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3) La racine d'une racine s'obtient au moyen d'une seule racine dont l'ordre est le produit des ordres précédents.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Démonstration.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{x^3} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{100x^2} = \sqrt{100} \times \sqrt{x} = 10\sqrt{x}$$

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{x^3} = 2\sqrt[3]{x^3}$$

$$\sqrt[5]{16} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{6}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5}$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

- 4) La racine d'une puissance est égale à la puissance de la racine.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Démonstration. -

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{1/n} = a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

- 5) Pour passer d'un radical d'ordre n à un radical d'ordre nk , on multiplie l'ordre n et l'exposant m par la constante k

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (n, k \in \mathbb{N}^*)$$

Démonstration. -

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \Rightarrow a^{mk/nk} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Ces démonstrations devraient être accompagnées d'exemples utilisant des valeurs numériques. (Voir les exercices suggérés)

$$(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = 7$$

$$(\sqrt[3]{5})^3 = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt{2^3} = \sqrt[4]{2^6}$$

$$\sqrt[3]{7^5} = \sqrt[9]{7^{15}}$$

$$\sqrt[4]{8^6} = \sqrt{8^3}$$

ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

OPÉRATIONS SUR LES RADICAUX

Dans cette section, il s'agit de montrer à l'aide d'exemples comment opérer sur les radicaux. Cette étude rendra les élèves plus habiles à utiliser les propriétés des radicaux et des exposants.

1^o Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire des radicaux il faut :

- réduire les radicaux à leur forme la plus simple
- additionner ou soustraire les quantités qui multiplient les radicaux semblables (même ordre et même radicand)

$$n\sqrt{y} + m\sqrt{y} = (n + m)\sqrt{y}$$

Effectuer

a) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

b) $9\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$

c) $a\sqrt{2} + 2a\sqrt{2}$

d) $15b\sqrt{6} - 10b\sqrt{6}$

e) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{20}$

f) $5a\sqrt{24} - a\sqrt{6}$

g) $3\sqrt{3} + 8\sqrt{75} - 5\sqrt{125} - 2\sqrt{27}$

h) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

1.0 Multiplication

Pour multiplier des radicaux de même ordre il faut:

- appliquer la première propriété soit

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

- réduire le radical obtenu à sa forme la plus simple

NOTE: Si les radicaux sont d'ordres différents, on les ramène au même ordre, puis on procède tel qu'indiqué ci-dessus.

EXERCICES ET REFERENCES

Effectuer

a) $2 \cdot 3 \sqrt{3}$

b) $5 \sqrt{7} \cdot 6 \sqrt{7}$

c) $2 \sqrt{a} \cdot 3 \sqrt{6}$

d) $4 \sqrt{x} \cdot 6 \sqrt{2x}$

e) $2a \sqrt{5b} \cdot 3 \sqrt{2b}$

f) $\sqrt{3} (2 \sqrt{3} + \sqrt{10})$

g) $3 \sqrt{6} (2 \sqrt{8} - 5 \sqrt{6})$

h) $a \sqrt{b} (2 \sqrt{3b^2} + 2b \sqrt{3})$

i) $2 \sqrt{2x} (2x \sqrt{7} - \sqrt{x})$

j) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

3^o Division

Pour diviser deux quantités contenant des radicaux au dénominateur d'ordre 2, il suffit de rationaliser la fraction (i.e. éliminer les radicaux du dénominateur).

- lorsque le dénominateur est un monôme de la forme $a\sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

- lorsque le dénominateur est un binôme de la forme $(a \pm \sqrt{b})$ ou $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

le conjugué de $(a + \sqrt{b})$ est $(a - \sqrt{b})$

le conjugué de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

EXERCICES ET REFERENCES

Effectuez les divisions suivantes:

a) $2\sqrt{5} \div 3\sqrt{2}$

b) $15\sqrt{3} \div 5\sqrt{3}$

c) $6 \div (3 - \sqrt{2})$

d) $5 \div (\sqrt{3} + 1)$

e) $\sqrt{3} \div (2\sqrt{3} + 1)$

f) $\sqrt{5} \div (5\sqrt{3} + \sqrt{7})$

g) $2\sqrt{6} \div (2\sqrt{3} - 4\sqrt{5})$

h) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5 Utilisation de la calculatrice.

Pour terminer l'étude de cet objectif, il s'avère important de vérifier si les élèves sont en mesure d'effectuer des opérations contenant des exposants et des radicaux, à l'aide de la calculatrice.

Les exercices ci-contre permettent d'utiliser les touches suivantes:

$$\boxed{x^2} \quad \boxed{\sqrt{x}} \quad \dots$$

$$\boxed{x^y} \quad \dots$$

$$\boxed{EE} \quad \text{ou} \quad \boxed{EXP}$$

$$\dots$$

NOTE: Le guide d'utilisation de la calculatrice au secondaire (16-3305-01) pourrait être consulté.

- a) $\sqrt[3]{7}$ b) $(10)^{1,5}$ c) $\sqrt[5]{10}$
- d) $\sqrt{2,042}$ e) $40,5 \times \sqrt[3]{36}$
- f) $\frac{800 \times (0,845)^2 \times \sqrt[3]{0,27}}{\sqrt{245}}$
- g) $(0,00752)^{-3/5}$
- h) $\frac{4,8 \times 6,3}{\sqrt{2}} + 25 \times (3,01)^2$
- i) $\frac{8,4 \times 10^3 + 4,2 \times 10^3}{2,1 \times 10^2}$
- j) ...

Deuxième partie

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Pour cette partie, l'on couvrira les objectifs suivants:

4.2.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction exponentielle.

4.2.3 Une base étant donnée, DEFINIR le domaine et l'image d'une fonction exponentielle.

4.2.4 Une base étant donnée, DETERMINER si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné.

4.2.5 Une base étant donnée, DETERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction exponentielle.

4.2.6 TROUVER la réciproque d'une fonction exponentielle donnée.

4.2.7 Le graphique cartésien d'une fonction exponentielle étant donné, TRACER son image par une translation.

4.2.8 Une fonction exponentielle étant donnée, ECRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation.

4.2.9 DETERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions exponentielles.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Il faut montrer qu'il existe de nombreux cas de croissance: montant placé à intérêt composé, croissance de population, charge d'un condensateur électrique, etc.

EXEMPLE. -

On décide de placer 5000 \$ pour l'achat d'obligations. La société qui nous vend ces obligations nous garantit un taux d'intérêt de 10% et cela pour les prochaines vingt-cinq années. Où en serait le capital en l'an 2010 si l'achat des obligations s'est effectué le 1er janvier 1985?

Soit $C(t)$, le capital et les intérêts accumulés après t années.

Le 1er janvier 1986, on aura:

$$\begin{aligned} C(1) &= (5000 \$ \times 10\%) + 5000 \$ \\ &= 5000 \$ \times 110\% \\ &= 5000 \$ \times 1,1 = 5500 \$ \end{aligned}$$

Le 1er janvier 1987, le capital accumulé sera:

$$\begin{aligned} C(2) &= (5500 \$ \times 10\%) + 5500 \$ \\ &= 5500 \$ \times 1,1 \\ &= 5000 \$ \times 1,1 \times 1,1 = 5000 \$ \times (1,1)^2 \\ &= 6050 \$ \end{aligned}$$

Voir: Fonctions et calculs numériques à l'aide de la calculatrice (pages 155 à 168) pour d'autres exemples.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Le 1^{er} janvier 1988, on peut déduire que:

$$C(3) = 5000 \$ \times (1,1)^3 \\ = 6655 \$$$

Après t années: $C(t) = 5000 \$ \times (1,1)^t$

En l'an 2010 on aura donc accumulé la somme de:

$$C(25) = 5000 \$ \times (1,1)^{25} = 54\,173,53 \$$$

—

Conclure en mentionnant que les équations de la forme

$$N = k(a)^t$$

rendent compte de nombreux cas de croissance...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1. - Définition et représentation graphique de la fonction exponentielle

DEFINITION:

Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par l'équation

$f(x) = a^x$ (où $a \in \mathbb{R}_+$ et $a \neq 1$) est dite une fonction exponentielle de base a .

(a^x se note aussi $\exp_a x$)

Remarques:

- 1) La base a est positive car les exposants irrationnels ne sont définis que par rapport à une base positive (ex. $a^{1/2} = \sqrt{a}$)
- 2) La base a est différente de 1 car la fonction $f(x) = 1^x$ n'est nulle autre que la fonction constante $f(x) = 1$

Si $ff(x) = 2^x$ alors,

$$f(3) = f(0) =$$

$$f(-2) = f(-1) =$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

Si $f(x) = 4^x$ alors,

$$f(-2) = f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$f(y) =$$

Calcule:

$$\exp_3(-2) \cdot \exp_3(-1) \cdot \exp_3(0)$$

EXERCICES ET REFERENCES

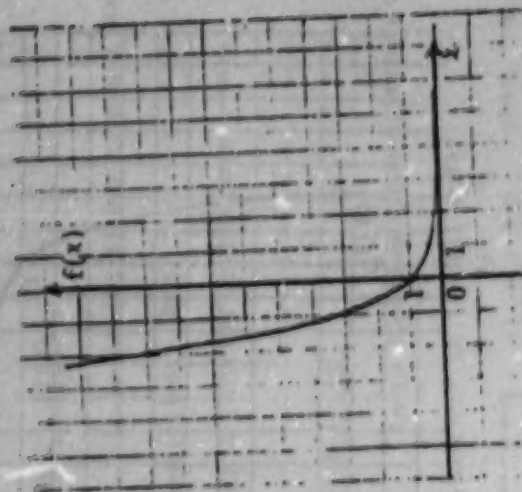
ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Pour tracer le graphique de cette fonction, on doit étudier

3 cas: $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

Ex.: $a < 1$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



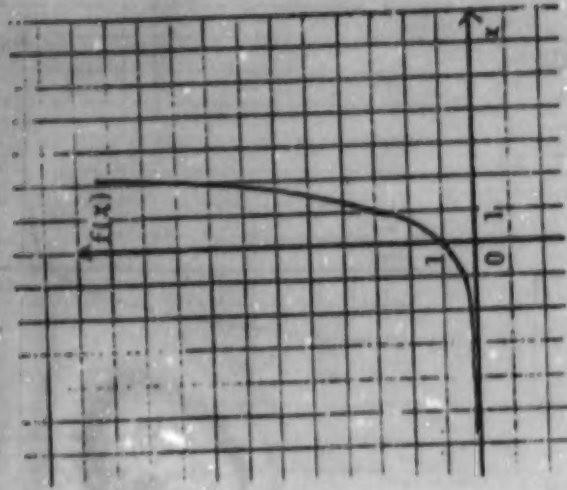
x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
3	$1/27$
2	$1/9$
1	$1/3$
0	1
-1	3
-2	9
-3	27
$\vdots$	$\vdots$

Si $x < 0$ alors $f(x) > 1$, si $x > 0$ alors $f(x) < 1$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

i.e.: $a > 1$

$$f(x) = 3^x$$



x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
3	27
2	9
1	3
0	1
-1	1/3
-2	1/9
-3	1/27
$\vdots$	$\vdots$

Si $x < 0$ alors $f(x) < 1$, si $x > 0$ alors $f(x) > 1$ NOTE: le cas où $a = 1$ représente la fonction constante $f(x) = 1$

EXERCICES ET REFERENCES

En utilisant la représentation graphique le $f(x) = 3^x$, donne la valeur approximative pour

$$3^2, 3^{\sqrt{2}}, 3^{1/2}, 3^{5/2},$$

Si on trace sur un même graphique les fonctions

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = 3^x,$$

$$f(x) = 4^x, \quad f(x) = 5^x,$$

quelle courbe se rapproche le plus de l'axe vertical?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2.- Propriétés

DOMAINE ET IMAGE

Le domaine d'une fonction exponentielle est toujours

$\mathbb{R}$ et l'image toujours $\mathbb{R}_+$.

POINT CLEF

Le point $(0, 1)$ est commun à toutes les fonctions exponentielles. Dans $f(x) = a^x$, si $x = 0$ alors $a^x = 1$ par définition de l'exposant nul.

INJECTIVITE

Toute fonction exponentielle est injective. Cette propriété se traduit aussi:

$x_1 \quad x_2$
Si $a = a$ alors $x_1 = x_2$

D'après la représentation graphique de $f(x) = 3^x$, donne la valeur de x dans chaque cas:

$$3^x = x$$

$$3^x = 2$$

$$3^x = 4$$

$$3^x = 0,8$$

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Cette propriété permettra de résoudre certaines équations exponentielles simples.

Ex: 1) $2^x = 2^{12}$, on conclut que $x = 12$

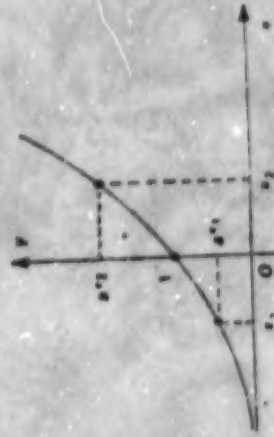
2) $4^x = 64$

$4^x = 4^3 \rightarrow x = 3$

CROISSANCE-DECROISSANCE

Pour $a > 1$, la fonction $f(x) = a^x$ est telle que
 $x_1 < x_2 \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

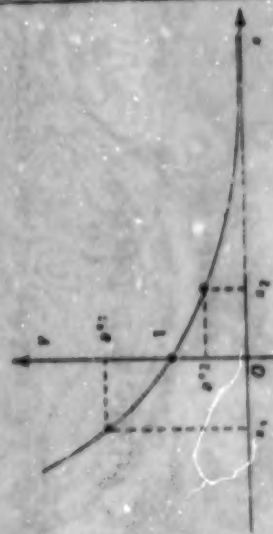
Cette fonction est
strictement croissante



EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Pour $0 < a < 1$, la fonction f
est telle que: $x_1 < x_2$ et $a > a$



Cette fonction est
strictement décroissante

Vérifications.-

Soit $f(x) = 2^x$, si $2 < 3$ alors $2^2 < 2^3$
 $4 < 8$

Soit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, si $2 < 3$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

On remarque que dans les inéquations exponentielles il faudra se méfier.

$$2^x > 32 \text{ est équivalent à } 2^x > 2^5$$

on a donc la solution $x > 5$

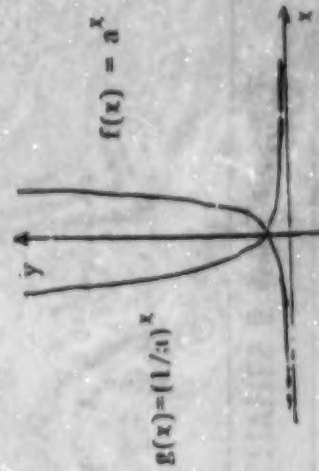
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \text{ est équivalent à } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

on a donc la solution $x < 3$

SYMETRIE.-

Les fonctions $f(x) = a^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

sont des fonctions symétriques par rapport à l'axe vertical.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 3.- 1.'image d'une fonction exponentielle par une translation.

Pour décrire certaines règles, on fait construire les graphiques de quelques fonctions:

$$f(x) = 2^{x-3} \dots$$

1.'image de la fonction $f(x) = 2^x$ par une translation horizontale de 3 unités à droite

$$f(x) = 2^x - 3 \dots$$

$$f(x) = 2^{x-3} - 3 \dots$$

$$\vdots$$

EXERCICES ET REFERENCES

Trouve le domaine et l'image des fonctions suivantes:

$$f(x) = 2^{x+1}$$

$$f(x) = -\left(5^{2x}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 10$$

$$f(x) = 3^x + 1$$

$$\vdots$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1.- Equations et inéquations exponentielles.

the équation (ou inéquation) est exponentielle quand l'inconnue est un exposant.

On donne quelques exemples et on complète par les exercices proposés:

$$5^x = 81$$

$$3^x > 81$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} = 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} < 27$$

⋮

⋮

Résous les équations suivantes:

a) $3^{3x} = 81$

b) $6^{x+1} = \frac{1}{36}$

c) $4^{2x} = 8^{x+1}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 9$

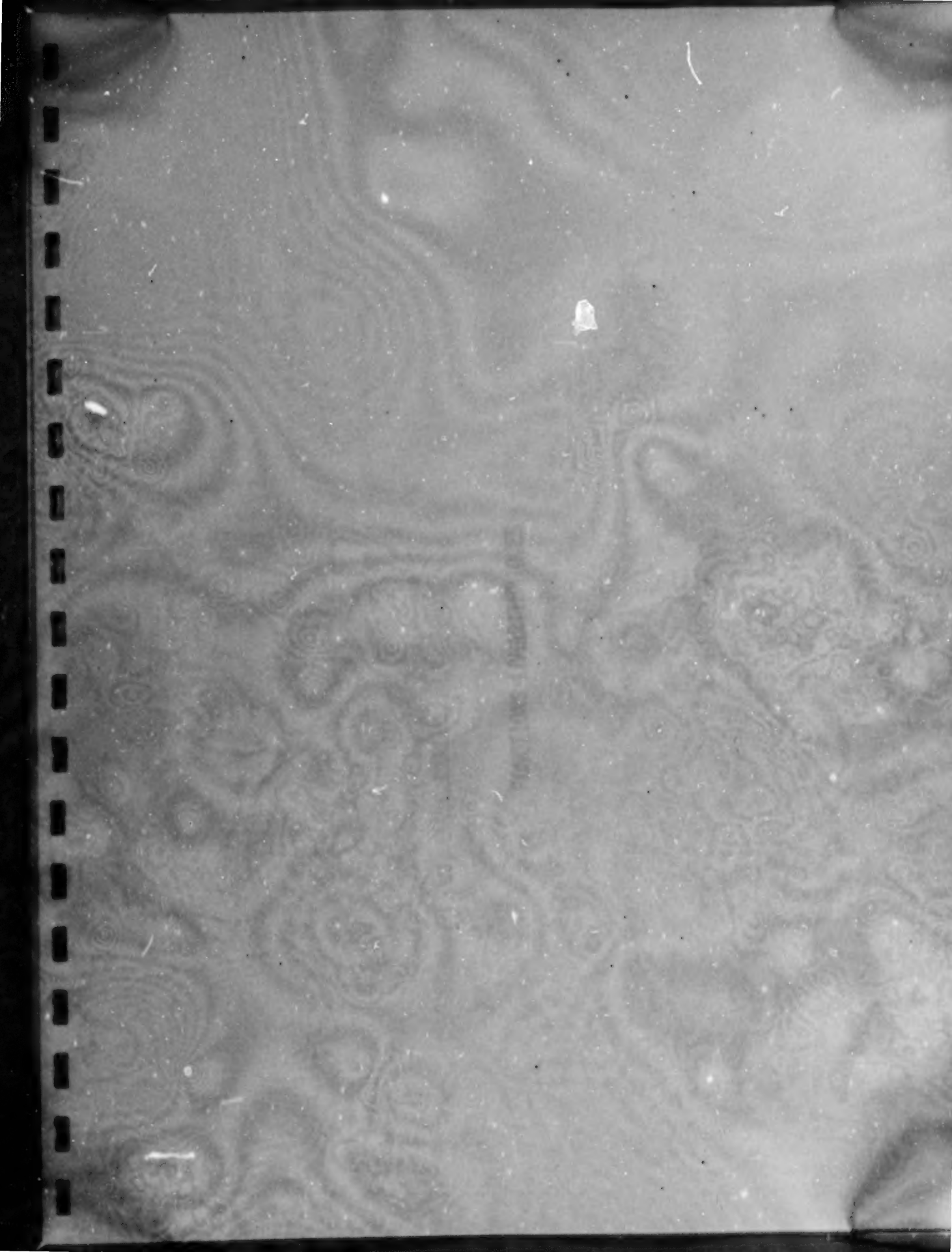
e) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$

f) $5^{3x-1} < 125$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} > \frac{8}{27}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$

i) ...



Troisième partie

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Pour cette partie, l'on couvrira les objectifs suivants:

- 4.3.1 Ecrire sous une forme logarithmique une expression algébrique énoncée sous une forme exponentielle et vice versa.
- 4.3.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction logarithmique.
- 4.3.3 Une base étant donnée, DETERMINER le domaine et l'image d'une fonction logarithmique.
- 4.3.4 Une base étant donnée, DETERMINER si une fonction logarithmique est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné.
- 4.3.5 Une base étant donnée, DETERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction logarithmique.
- 4.3.6 TROUVER la réciproque d'une fonction logarithmique donnée.
- 4.3.7 Le graphique cartésien d'une fonction logarithmique étant donné, TRACER son image par une translation.
- 4.3.8 Une fonction logarithmique étant donnée, Ecrire l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation.
- 4.3.9 DEMONSTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique.
- 4.3.10 DETERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions logarithmiques.

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1.- Définition et représentation graphique de la fonction logarithmique.

Définition:

La fonction exponentielle d'équation $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; peut se noter par $\exp_a(x)$; c'est-à-dire que $\exp_a(x) = a^x$.

Le fait que $\exp_a$ soit injective sur $\mathbb{R}$ on peut affirmer que la fonction inverse $\exp_a^{-1}$ existe:

$$\exp_a^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \exp_a^{-1} x$$

$$\text{où } \text{Dom}(\exp_a^{-1}) = \mathbb{R}^+ \quad \text{Im}(\exp_a^{-1}) = \mathbb{R}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Notre façon plus pratique:

$$\exp_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a^x \right\}$$

$$\exp_a^{-1} = \left\{ (y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a^x \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a^y \right\}$$

$\exp_a^{-1}$ est appelée "fonction logarithmique de base a " et est notée $\log_a$ et en utilisant la notation fonctionnelle,

nous aurons:

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

$$(a > 0, a \neq 1)$$

Ainsi, $y = \log_a x \iff x = a^y$

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dots \right\}$$

$$y = f(x)$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

REPRESENTATION GRAPHIQUE

Connaissant le graphique d'une fonction exponentielle, on en déduit le graphique de la fonction logarithmique de même base. On sait que ces graphiques sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice des premier et troisième quadrants.

L'exercice ci-contre peut également être proposé.

EXERCICES ET REFERENCES

- a) Complète la table où la fonction f est définie par $f(x) = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

- b) Construis le graphique de $f(x)$

- c) Pour trouver l'inverse on peut substituer dans $y = 3^x$ qui devient alors $x = 3^y$.

Complète la table et trace la courbe

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 3^y$								

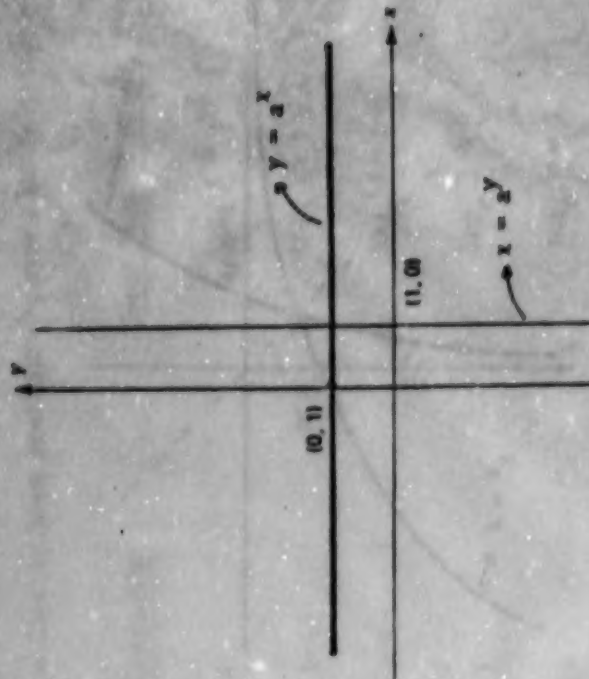
OBJECTIF INTERMEDIAIRE () :	Page 5
$a > 1$ ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

OBJECTIF INTERMEDIAIRE ()

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

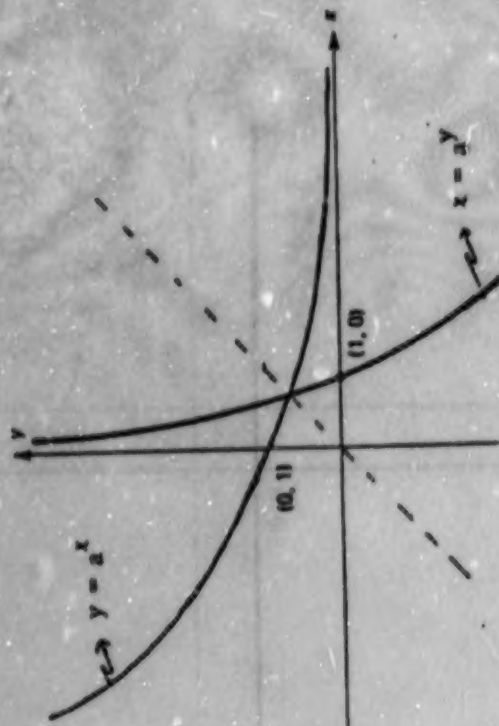
$a = 1$



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

$$a < 1$$



EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 2.- Utilisation de la définition

Les deux équations $x = a^y$ et $y = \log_a x$ sont équivalents, on utilisera donc la plus pratique dépendant de la situation.

Forme exponentielle

$$a^y = x$$

$$2^4 = 16$$

$$g^{-2} = 1/64$$

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{cases}$$

Forme logarithmique

$$\log_a x = y$$

$$\log_2 16 = 4$$

$$\log_8 1/64 = -2$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

CALCULE:

a) $\log_2 8$

b) $\log_4 2$

c) $\log_3 81$

d) $\log_4 1/16$

e) $\log_7 \sqrt[3]{7}$

f) $\log_{1/10} 100$

g) $\log_2 8\sqrt{2}$

h) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

On donne quelques exemples d'utilisation de la définition
avant de proposer des exercices:

$$\log_5 x = 4 \iff 5^4 = x$$

$$x = 625$$

$$y = \log_4 32 \iff 4^y = 32$$

$$2^{2y} = 2^5 \iff 2y = 5$$

$$y = \frac{5}{2}$$

$$\log_a 9 = 2/3 \iff a^{2/3} = 9$$

$$\left(a^{2/3}\right)^{3/2} = 9^{3/2}$$

$$a = 9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 27$$

EXERCICES ET REFERENCES

Résous pour x

a) $\log_x 64 = 3$ b) $\log_x 16 = 2$

c) $\log_9 1/27 = x$ d) $\log_8 x = 3$

e) $\log_5 x = 3$ f) $\log_5 25 = x$

g) $\log_{81} 1/27 = x$ h) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 3.- Propriétés

Domaine et image

Le domaine de la fonction logarithmique est $\mathbb{R}^+$ et l'image est $\mathbb{R}$. Ainsi, le logarithme $(\log_a)$ de zéro ou d'un nombre négatif n'existe pas.

Point commun

Toutes les courbes de logarithmes passent par le point $(1,0)$. Donc, quelle que soit la base " a ".

$$\log_a 1 = 0.$$

EXERCICES ET REFERENCES

Construis le graphe des fonctions suivantes:

$$f(x) = \log_3 x \quad f(x) = \log_{1/3} x$$

Construis le graphe précis de

$$f(x) = \log_2 x \text{ et, d'après ce graphe,}$$

trouve:

$$\log_2 7, \log_2 3, \log_2 10, \log_2 2,5$$

Trouve les fonctions logarithmiques dont le graphique comprend les points suivants:

a) $(2, -1)$ b) $(1/8, -3)$

c) $(9, 2)$ d) $(100, 2)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

INJECTIVITE

Il est évident que si 2 nombres sont égaux, ils ont même logarithme:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \log_3 x_1 = \log_3 x_2$$

Réciproquement, puisque la fonction logarithmique est injective, si deux nombres ont le même logarithme, ils sont égaux:

$$\log_3 x_1 = \log_3 x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Cette propriété permettra de résoudre certaines équations logarithmiques.

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \log_5 x = \log_5 125 \Rightarrow x = 125$$

A faire après avoir vu les propriétés.

Résoudre pour x :

a) $\log_6 (3x) = 2$ b) $\log_5 (3x-1) < 3$

c) $\log_{2/3} \left(\frac{x+1}{2} \right) > 2$ d) $\log_2 (3x) = 4$

e) $\log_{1/2} (x+1) = -1$

f) $\log_2 x < 1/2$

g) $\log_3 (x+2) > 2$

h) $\log_{1/3} 3x < -1$

i) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Croissance - Décroissance

1°) La fonction $\log_a x$ où $a > 1$, est strictement

croissante:

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Ex: $1/2 < 4 \implies \log_2 1/2 < \log_2 4$

$$(-1 < 2)$$

2°) La fonction $\log_a x$ où $a < 1$, est strictement

décroissante:

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Ex: $2 < 4 \implies \log_{1/2} 2 > \log_{1/2} 4$

$$(-1 > -2)$$

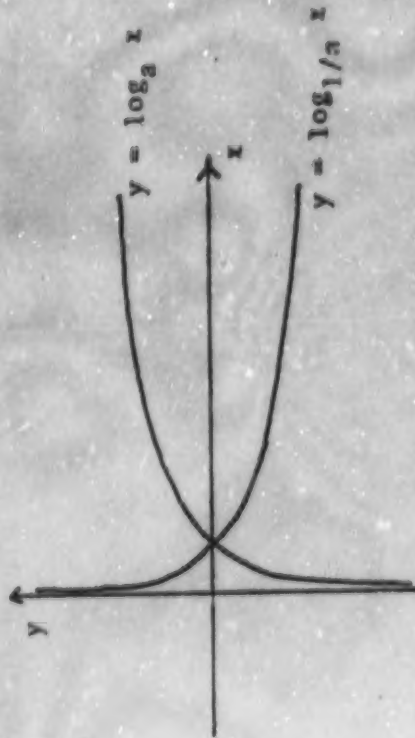
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Symétrie

Les graphes de $\log_a x$ et $\log_{1/a} x$

où $a > 1$ sont symétriques par rapport

à l'axe des x .



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 4.- L'image d'une fonction logarithmique par une translation.

Pour dégager certaines règles, on fait construire les graphiques de quelques fonctions:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_2 (x-1)$$

$$f(x) = \log_2 x - 1$$

$$f(x) = \log_2 (x+2)$$

•
•
•

EXERCICES ET REFERENCES

Trouve le domaine et l'image des fonctions suivantes:

$$f(x) = \log_3 (x+3)$$

$$f(x) = -\log_2 2x$$

$$f(x) = 3 \log_2 (x-1) + 3$$

•
•
•

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5.- Lois des logarithmes

L'utilisation des logarithmes dans les calculs repose sur des lois importantes. On démontre ici chaque loi.

Logarithme d'un produit

Le logarithme d'un produit de facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de chacun des facteurs du produit.

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$$

Démonstration:

$$\text{Soit } x = \log_a M \text{ et } y = \log_a N$$

$$\text{Alors } M = a^x \quad N = a^y \quad (\text{définition des logarithmes})$$

Trouve la valeur de:

$$\log_2 (4)(32)$$

$$\log_3 729 \quad (729 = 9 \times 81)$$

Trouve la valeur de $\log_a 30$ sachant

$$\text{que } \log_a 5 = 0,6990$$

$$\text{et } \log_a 6 = 0,7782$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$$\text{Ainsi } M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

$$\text{D'où } \log_a M \cdot N = x + y \quad (\text{définition des logarithmes})$$

$$= \log_a M + \log_a N \quad (\text{par substitution})$$

Logarithme d'un quotient

Le logarithme d'un quotient de deux nombres positifs est égal à la différence des logarithmes des deux termes du quotient.

$$\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N$$

Démonstration:

$$\text{Soit } x = \log_a M \text{ et } y = \log_a N$$

$$\text{Alors, } M = a^x \text{ et } N = a^y$$

$$\text{et } M/N = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

- Trouve la valeur de $\log_9 \left(\frac{81}{3}\right)$

- Trouve la valeur de

$$\log_6 1296 - \log_6 36$$

- Si $\log_a 24 = 1,3802$ et

$$\log_a 6 = 0,7782,$$

que vaut $\log_a 4$?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Ainsi, $M/N = a^x - y$

$$\log_a (M/N) = x - y$$

$$= \log_a M - \log_a N$$

Logarithme d'une puissance

Le logarithme d'un nombre positif M élevé à la puissance K est égal au logarithme de M multiplié par l'exposant K .

$$\log_a M^K = K \cdot \log_a M$$

Démonstration:

Si $x = \log_a M$ alors $a^x = M$

et $M^K = (a^x)^K = a^{Kx}$

Ainsi, si $M^K = a^{Kx}$ on a $\log_a M^K = K \cdot x$
 (où) $\log_a M^K = K \cdot \log_a M$

- Calcule $\log_2 4^3$

- Si $\log_a 2 = 0,3010$ et $\log_a 3 = 0,4771$ que vaut $\log_a \sqrt{6}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Changement de base

Pour exprimer la valeur du logarithme du nombre N dans la base " a " dans une autre base " b ", on divise le logarithme du nombre N dans la base b par le logarithme du nombre a dans la base b .

Démonstration:

$$\text{Soit } N = a^{\log_a N}$$

$$\text{alors, } \log_b N = \log_b \left(a^{\log_a N} \right)$$

$$\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$$

$$\therefore \frac{\log_b N}{\log_b a} = \log_a N$$

EXERCICES ET REFERENCES

- Exprime $\log_5 240$ dans la base 10.

- Trouve $\log_2 b$ et $\log_2 x$ si

$$\log_b 2 = 0,69 \text{ et } \log_b x = 1,22$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Chaque démonstration devra être accompagnée d'exemples ...

Il faut également mentionner l'utilité et l'importance des propriétés qui découlent directement de la définition:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^N = N$$

Terminer l'activité par des exercices faisant appel aux différentes lois et propriétés.

EXERCICES ET REFERENCES

Calcule:

a) $\log_2 16 \sqrt{8}$ b) $\log_3 \left(\sqrt[3]{\frac{27}{9}} \right)$

c) $\log_4 100 - \log_4 50$

d) $\pi \log_{10} 1$ e) $\log_3 -5$

f) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 6.-

Equations ou inéquations avec logarithmes

Le but de cette activité est d'habilité l'élève à résoudre des équations ou inéquations simples utilisant la définition et les lois des logarithmes.

On donne ici quelques exemples et on complète par les exercices proposés:

Ex: Résoudre pour x dans $\log_4 3 + \log_4 (x + 2) = 2$

Solution: $\log_4 3 + \log_4 (x + 2)$

$$\log_4 3 (x + 2) = 2$$

En appliquant la définition nous aurons:

$$3 (x + 2) = 4^2 = 16$$

$$3x + 6 = 16$$

$$3x = 10$$

$$x = 10/3$$

On prend toujours le logarithme d'un nombre positif, donc $x > -2$

EXERCICES ET REFERENCES

Calcule x si:

a) $\log_3 x = 2/3$

b) $\log_{10} x + \log_{10} x = 4$

c) $\log_{10} 3x^2 - \log_{10} x = \log_{10} 21$

d) $\log_3 z = \log_5 125$

e) $2 + \log_{10} (x + 4) = 3 \log_{10} 10$

f) $\log_5 x = \log_4 64$

g) $\log_8 x + \log_8 (1/6) = 1/3$

h) $\log_4 (x - 8) + \log_4 (x - 2) = 2$

i) ...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 7.- Logarithmes naturels et logarithmes décimauxLogarithmes naturels ou népériens

L'un des nombres les plus importants en mathématique est le nombre e . Ce nombre irrationnel est défini comme suit:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e \approx 2,718\ 281\ 828\ \dots$$

Beaucoup de phénomènes physiques sont de type exponentiel et leurs lois sont souvent énoncées à l'aide de ce nombre. C'est pourquoi Néper utilisa ce nombre dans la définition de ses logarithmes.

Montre que

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \approx 2,718$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Le logarithme naturel de N se note $\ln N$.

$$\text{Ainsi, } y = \ln N \iff N = e^y$$

Note: $\ln N = \log_e N$

Il est important que l'élève puisse utiliser la touche $\boxed{\ln}$ de sa calculatrice avant de poursuivre.

- En effectuant la séquence $1 \boxed{\ln}$ on obtient 0.

Pourquoi?

- En effectuant la séquence $1 \boxed{\ln} \boxed{\ln}$

on obtient 2,718 ... Pourquoi?

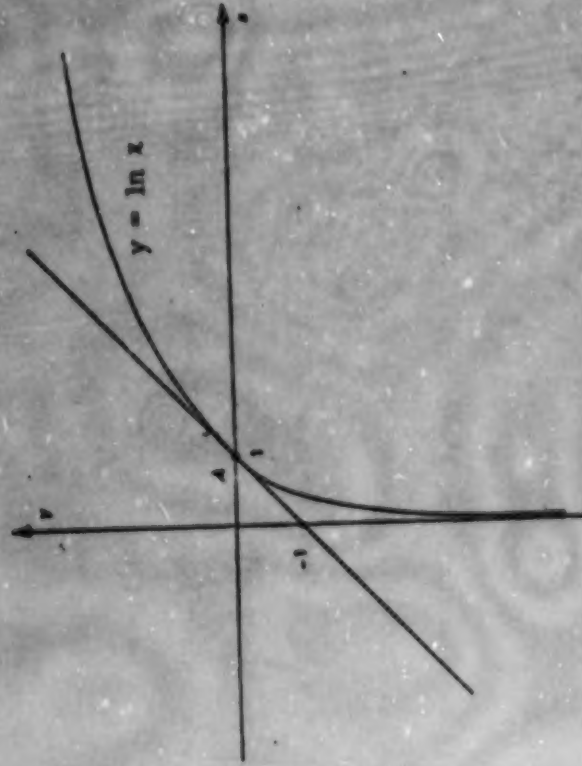
- Si $\ln N = 6,343$, quelle est la valeur de N ?

- etc

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

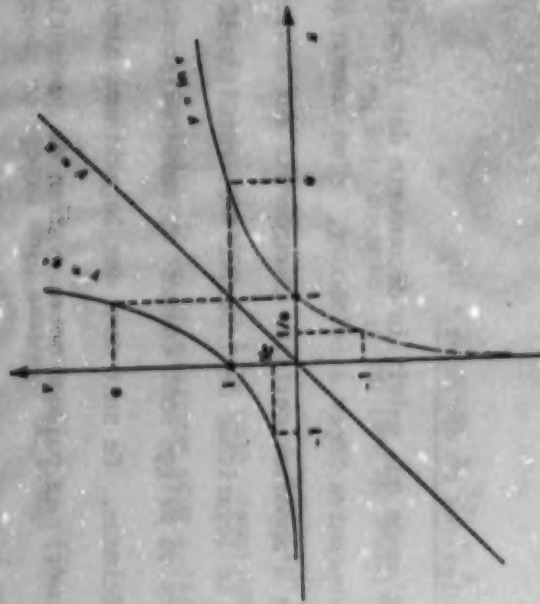
On peut faire construire le graphique de $y = \ln x$.



Remarque: On appelle e la base du logarithme dont la pente de la tangente au point $(1, 0)$ du graphique est 1.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Si on ajoute sur le même graphique la fonction $y = e^x$,
on obtient évidemment deux courbes symétriques par rapport à
la bissectrice $y = x$.



EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Les logarithmes naturels sont essentiels au calcul différentiel et intégral; on ne peut pas en dire autant des logarithmes décimaux...

Logarithmes vulgaires ou décimaux

Dans l'année qui suivit la découverte des logarithmes, Henry Briggs rencontra Néper à Edinbourg. D'un commun accord, ils résolurent d'apporter certains changements aux tables de logarithmes. Le logarithme de 1 devint 0 et celui de 10 devint 1. Ces logarithmes de Briggs sont connus aujourd'hui sous le nom de logarithmes décimaux. Ce sont donc des logarithmes mieux adaptés aux calculs numériques puisque notre système de numération est dans cette même base.

Jusqu'à aujourd'hui, les logarithmes ont servi à évaluer des expressions telles

$$\left(\sqrt[3]{6,348}\right)^3, \quad \frac{\sqrt[3]{3428} \times \sqrt[3]{6329}}{\left(\sqrt[3]{751}\right)^2}, \quad \dots$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

En appliquant les lois sur les logarithmes, à l'aide d'une table de logarithmes on parvenait donc, après de longs calculs, à évaluer approximativement ces expressions.

A quoi servent maintenant les logarithmes décimaux puisque la calculatrice nous donne un résultat plus précis en beaucoup moins de temps?

L'activité 8 nous montrera qu'on peut les utiliser pour résoudre des équations. Bien sûr, on peut tout aussi bien utiliser les logarithmes naturels.

Le logarithme décimal de N se note $\log N$.

$$\text{Ainsi, } y = \log N \iff N = 10^y$$

Note: $\log N = \log_{10} N$

On termine cette activité en explorant la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice et en faisant construire les courbes de $y = 10^x$ et $y = \log x$.

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 8. - Equations (ou inéquations) exponentielles et logarithmiques.

On a vu précédemment certaines équations exponentielles simples. Pour les résoudre il s'agissait de ramener chaque membre de l'équation à une forme exponentielle de même base.

Comme ce n'est pas toujours possible, un certain nombre d'équations exponentielles se résolveront en prenant les logarithmes des deux membres.

Exemple:

Quelle est la valeur de x dans $4^x + 1 = 5$?

Solution:

$$4^x + 1 = 5$$

$$\log 4^x + 1 = \log 5$$

$$(x + 1) \log 4 = \log 5$$

$$x \log 4 + \log 4 = \log 5$$

$$x \log 4 = \log 5 - \log 4$$

$$x = \frac{\log 5 - \log 4}{\log 4}$$

$$x \approx 0,16$$

$$4^x + 1 = 5$$

$$\ln 4^x + 1 = \ln 5$$

$$(x + 1) \ln 4 = \ln 5$$

$$x \ln 4 + \ln 4 = \ln 5$$

$$x \ln 4 = \ln 5 - \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 4}$$

$$x \approx 0,16$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Grâce à la calculatrice, il est évident qu'on peut utiliser aussi bien les logarithmes naturels que les logarithmes décimaux pour résoudre.

Exemple:

Quelle est l'ensemble-solution de l'inéquation $4^x > 5/3$?

Solution:

$$4^x > 5/3$$

$$\log 4^x > \log 5/3$$

$$x \log 4 = \log 5/3$$

$$x > \frac{\log 5 - \log 3}{\log 4}$$

$$x > 0,3685...$$

$$4^x > 5/3$$

$$\ln 4^x > \ln 5/3$$

$$x \ln 4 > \ln 5/3$$

$$x > \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 4}$$

$$x > 0,3685...$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0,3685... \right\} \text{ est l'ensemble-solution}$$

D'autres équations (ou inéquations) se résolveront en ramenant à une forme logarithmique de base 10 ou e grâce à la calculatrice.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exemple:

Quelle est l'ensemble-solution de $\log_2 (x + 1)^7 = 20$?

Solution:

$$7 \log_2 (x + 1) = 20$$

$$\log_2 (x + 1) = 20/7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{changement} \\ \text{de base} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\log (x + 1)}{\log 2} = 20/7 \\ \log (x + 1) = 20 \frac{\log 2}{7} \end{array} \right.$$

$$\log (x + 1) \approx 0,8601$$

$$x + 1 \approx 7,246$$

$$x \approx 6,246$$

$$7 \log_2 (x + 1) = 20$$

$$\log_2 (x + 1) = 20/7$$

$$\frac{\ln (x + 1)}{\ln 2} = 20/7$$

$$\ln (x + 1) = 20 \frac{\ln 2}{7}$$

$$\ln (x + 1) \approx 1,9804$$

$$x + 1 \approx 7,246$$

$$x \approx 6,246$$

Résons pour x

a) $4^x = 5^{2x} + 1$

b) $4^{2x} + 1 = 7^{2x} - 1$

c) $\log (x + 3)^2 = 2$

d) $\ln (13 + 2x)^7 = 14$

e) $3^{2x} + 3^x = 6$

f) $\log_4 (x^2 - 16) = 3$

g) $x \log x = 100x$

h) $\ln (x - 9) - \ln (x + 3) = 1$

·
·
·

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 9.-

L'étude des fonctions exponentielles et logarithmiques qui est nécessaire à la poursuite d'études plus avancées en mathématique, n'aura de sens que si l'élève devient habile à résoudre des problèmes variés utilisant ces fonctions.

Cette activité propose donc de nombreux problèmes permettant d'atteindre ce but.

On donne d'abord plusieurs exemples en prenant soin de revenir sur le problème posé au début de cette partie.

Exemple 1:

On a placé 5000 \$ pour l'achat d'obligations. Le taux d'intérêt est de 10% pour les prochaines vingt-cinq années. En combien de temps le capital sera doublé?

En combien de temps le capital sera triplé....?

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Solution:

On a déterminé que le capital après t années se représentait par la fonction:

$$C(t) = 5000 \$ \times (1,1)^t$$

Le capital sera doublé si:

$$10\ 000 \$ = 5000 \$ \times (1,1)^t$$

$$2 = (1,1)^t$$

$$\log 2 = \log (1,1)^t$$

$$\log 2 = t \log (1,1)$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,1} \approx 7,27 \text{ ans (7 ans et 99 jours)}$$

Exemple 2:

Un certain sel radioactif se désintègre à une vitesse telle qu'après une année, il reste seulement 500/501 de la masse initiale. Si l'on dispose à un moment donné de 50 milligrammes de ce sel, combien en restera-t-il " t " années plus tard? Quelle est la période de désintégration du sel?

On appelle période d'un élément radioactif le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de sa masse initiale.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Solution:

a) Soit $M(t)$ le nombre de milligrammes restant après t années.

alors $M(0) = 50$

$$M(1) = (500/501) (50)$$

$$M(2) = \left(\frac{500}{501}\right)^2 (50)$$

$$= \left(\frac{500}{501}\right)^2 (50)$$

et ainsi de suite pour $M(3)$, $M(4)$...

$$\text{d'où } M(t) = 50 \left(\frac{500}{501}\right)^t$$

b) après une période, il ne reste plus que 25 milligrammes de sel; on a donc:

$$25 = 50 \left(\frac{500}{501}\right)^t \quad \text{ou} \quad 1/2 = \left(\frac{500}{501}\right)^t$$

et par suite: $\log (1/2) = t \log (500/501)$

$$\text{d'où } t = \frac{\log (1/2)}{\log (500/501)} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 500 - \log 501} = \frac{-0,3010}{-0,0008}$$

La période de désintégration de ce sel est donc de 376 ans.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

On termine cette activité et cette étude en faisant résoudre des problèmes utilisant des fonctions logarithmiques et des fonctions exponentielles.

Les pages suivantes présentent
plusieurs applications

N.B. La résolution de ces problèmes ne requiert pas nécessairement l'emploi des logarithmes. Cependant, la calculatrice est indispensable.

BANQUE DE PROBLEMES

- 1.- Certains polycopieurs font des copies ou légèrement plus grandes ou plus petites que l'originale. Supposons que l'un d'entre eux donne des copies 1,05 fois plus grandes en dimension linéaire vous faites des copies de copies, et que l'originale mesure 8 cm x 11 cm, quelles seraient les dimensions nouvelles des 3^e, 4^e et 7^e copies?
- 2.- A un rythme d'augmentation de 2%, une population double en 35 ans
 $(1,02)^{35} \approx 2$
 Qu'arrivera-t-il à ce rythme dans 350 ans?
- 3.- En combien d'années les prix doublent-ils à ces différents taux d'inflation.
 a) 5% b) 8% c) 12%
- 4.- La population du Québec en 1975 était d'environ 6 800 000 habitants et elle double tous les 40 ans. De combien sera-t-elle en l'an 2000?
- 5.- Pour mesurer la qualité d'un oeuf on utilise "l'unité de Haugh". Le nombre d'unités de Haugh pour un oeuf est donné par

$$100 \log \left[11 - \frac{1}{100} \sqrt{32.2} \left(30 W^{0.37} - 100 \right) + 1.9 \right]$$
 où W est la masse de l'oeuf en grammes et H est la hauteur de l'albume en millimètres lorsque l'oeuf est cassé sur une surface plane. Trouve le nombre d'unités de Haugh d'un oeuf ayant une masse de 56,7 g et une hauteur de 6 mm.
 (Cette formule a été introduite dans le U.S. Egg and Poultry Magazine en 1937.)

BANQUE DE PROBLEMES

6.- A cause du mauvais fonctionnement du système d'égouts d'une ville, une substance chimique toxique se déverse dans un lac qui est le réservoir d'eau potable de cette ville. Il faut donc cesser d'utiliser cette eau car le niveau de toxicité est 10 fois celui du niveau sécuritaire. Si le lac renouvelle 50% de son eau en 10 jours, dans combien de jours le Bureau de Santé permettra-t-il à la population d'utiliser cette eau sans danger?

7.- Les géologues mesurent parfois l'âge des roches en se servant de la "pendule atomique". Par exemple, une forme radioactive (isotope) du potassium, le potassium 40, subit une lente désintégration radioactive et devient l'élément non radioactif argon 40.

En mesurant la quantité de potassium 40 et d'argon 40 dans une roche on peut donc obtenir l'âge t du spécimen à partir de la formule suivante:

$$t = T \frac{\log (1 + 8,33A/K)}{\log 2}$$

où A et K sont respectivement le nombre d'atomes de l'argon 40 et du potassium 40 dans le spécimen et T est la "demi-vie" du potassium 40 soit $1,26 \times 10^9$ ans.

a) Quel âge donnes-tu à une roche où $K > 0$ et $A = 0$?

b) Quel âge donnes-tu à une roche où $A = K$?

c) Des analyses délicates montrent que le ratio A/K pour un échantillon de granite du New-Hampshire est de 0,212. Quel âge donnes-tu à ce granite?

BANQUE DE PROBLEMES

- 8.- Si r représente le pourcentage de perte d'une substance radioactive dans n unités de temps, A_0 la quantité initiale de substance, et A la quantité au temps t , la formule pour t est:

$$t = \frac{n \ln (A/A_0)}{\ln (1-r)}$$

Il est prouvé que 0,53 du radium disparaît en 12 ans. Trouve la demi-vie du radium.

- 9.- Si 30% d'une substance radioactive disparaît en 10 jours, combien de temps faudra-t-il pour que la substance disparaisse à 90%?

$$t = \frac{n \ln (A/A_0)}{\ln (1-r)}$$

- 10.- Ni la hauteur ni la masse seulement peut donner une bonne indication de l'aire de la surface d'une personne. En 1916, D. Dubois et E.F. Dubois ont suggéré la formule suivante:

$$S = a H^b W^c$$

où S est l'aire de la surface en mètres carrés, H la hauteur en centimètres et W la masse en kilogrammes; a , b , et c sont des nombres à déterminer.

- a) Des vérifications sur 401 cas montrent que les choix de $a = 0,02350$, $b = 0,42246$ et $c = 0,51456$ donnent une très bonne estimation. En utilisant ces valeurs, trouve l'aire de la surface d'un homme de 70 kilogrammes et mesurant 170 cm.

BANQUE DE PROBLEMES

- b) Quelle serait l'aire de la surface du même homme si $a = 0,02$, $b = 0,4$ et $C = 0,5$?
- c) Quelle serait l'aire de la surface du même homme si $a = 0,023$, $b = 0,42$ et $c = 0,51$?
- d) Compare les différentes valeurs obtenues.
- e) Estime l'aire de la surface de ton corps.
- 11.- On suppose que seulement 75% de la lumière passe à travers une plaque de verre de 1 cm d'épaisseur.
- a) Quel pourcentage de lumière passera à travers une plaque de verre de N cm d'épaisseur?
- b) Qu'obtiendra-t-on avec une plaque de verre de 0,5 cm d'épaisseur?
- 12.- La population de la terre était de 4 milliards en 1975 et elle double tous les 35 ans. Quelle formule nous permettrait d'obtenir la population P à l'année Y ? Vérifie ta formule pour l'an 2010 (8 milliards) et pour l'année 2045 (16 milliards). Qu'en sera-t-il en 1986?...
- 13.- Dans des circonstances favorables, une cellule de bactérie "Escherichia coli" se divise en deux toutes les 20 minutes. Si le même taux de reproduction se maintient pendant 10 heures, combien une de ces cellules produirait-elle d'organismes?
- 14.- A quel taux d'intérêt composé annuellement faut-il placer une somme de 1000 \$ pour qu'elle double en 12 ans?

BANQUE DE PROBLEMES

- 15.- En supposant que le taux annuel de dépréciation r d'une machine est constant, la valeur de démolition S après n années est donnée par la $S = C(1 - r)^n$, où C est le coût initial. Si le coût initial de la machine a été de 11 250 \$ et son taux de dépréciation de 15%, quelle est sa valeur de démolition après 8 ans?
- 16.- Le radio isotope C^{14} se désintègre très rapidement. Si à un moment donné, il y a 1 microgramme de ce carbone radio isotope, t minutes plus tard il reste A microgrammes, avec $A = (1/2)^{t/20}$. Calculer la quantité restante de C^{14} après
- a) 10 minutes
 - b) 20 minutes
 - c) une demi-heure
- 17.- (Biochimie) Un certain sel radioactif se désintègre à une vitesse telle qu'après une année il ne reste que les $3/4$ de la masse initiale. Si on dispose à un certain moment 36 g de ce sel, combien en restera-t-il après 5 ans?
- 18.- Le gaz d'un ballon fuit à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute le volume du ballon est le 0,6 de ce qu'il était au début de cette minute. Si le volume du ballon est de 3 000 m³, quel est son volume après 5 minutes?
- 19.- Le taux de désintégration d'une substance radioactive est tel qu'au bout d'une heure, seulement la moitié de la quantité originale demeure. Si l'on possède 128 grammes de cette substance, dans combien de temps restera-t-il 2 grammes?

BANQUE DE PROBLEMES

- 20.- Une famille vivait en 1979 avec 8 000,00 \$ par année, mais le coût de la vie a augmenté de 10% par année. Combien en coûtera-t-il à cette famille pour vivre en 1990?
- 21.- Une colonie d'insectes se reproduisent de la façon suivante: chaque insecte donne naissance à 4 rejetons et meurt en cours d'année. Si la colonie comptait 3 spécimens au début de la première année, combien en compte-t-elle après 10 ans?
- 22.- Un ballon se dégonfle au rythme 0,3 de son contenu à chaque heure. S'il contient $1\ 000\text{ cm}^3$ d'hélium à un certain moment, quelle quantité contient-il 6 heures plus tard?
- 23.- Après le déluge universel, il n'y avait plus que 8 personnes sur la terre. En admettant que ce nombre ait augmenté chaque année de sa 150^e partie, quelle était la population du globe à la venue de Jésus-Christ? Quelle serait la population actuelle?
(2 300 ans du déluge à Jésus-Christ et 4 285 ans jusqu'à nous)
- 24.- Une ville comptait 100 000 habitants en 1965 et 200 000 en 1975. Quelle sera la population en 1990 si le taux d'accroissement demeure constant?
- 25.- Un spéculateur prévoit que le prix des immeubles va continuer d'augmenter de 15% annuellement au cours des 10 prochaines années. Il achète une propriété de 100 000,00 \$ avec l'intention de la revendre lorsque sa valeur atteindra 250 000,00 \$. Combien de temps devra-t-il attendre?

BANQUE DE PROBLEMES

26.- Le carbone est l'élément clé des composés organiques et donc des êtres vivants. Le carbone 14, un isotope radioactif du carbone, a une demi-vie de 5 750 ans et on connaît la proportion de carbone 14 que renferme un organisme vivant. Cette proportion reste la même durant toute la vie d'un organisme, mais à sa mort, elle commence à varier en raison de la désintégration du carbone 14, qui n'est plus renouvelé par les échanges avec le milieu. En déterminant la quantité de carbone 14 que renferme un organisme, on arrive à déterminer la date de sa mort.

- a) A quelle époque a vécu un animal dont les os ont perdu 70% de leur carbone 14?
- b) Une momie du musée "Métropolitain" de New-York avait perdu 46% de son carbone 14. A quand remonte la momification?
- c) Une statuette sculptée dans l'ivoire a perdu 35% de son carbone 14. Quel est l'âge de cette statuette?